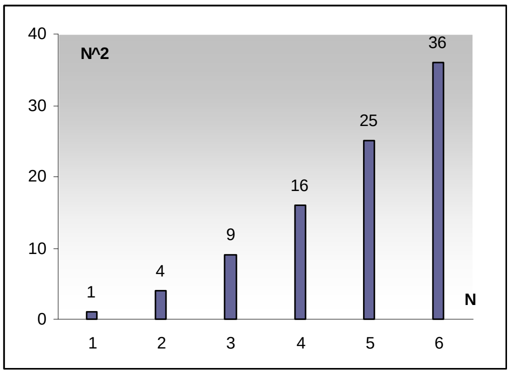
DIALOGO TRA UN MAESTRO ED UN DISCEPOLO

PRIMO GIORNO

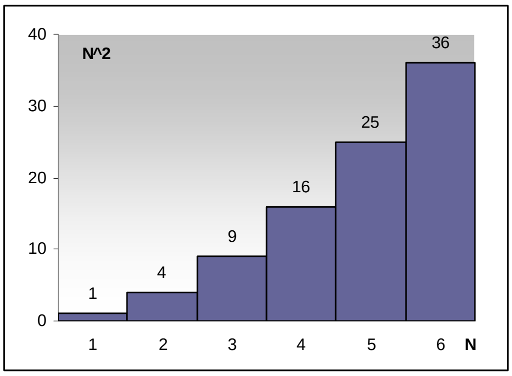
(Ma) Un attimo solo che finisco il caffè … ora sono pronto. Inizia pure.
(Di) Ho una domanda da farti.
(Ma) Bene, a quale riguardo?
(Di) A proposito della somma dei primi N numeri interi …
(Mi) Mi sembrava che avessimo esaminato abbondantemente la questione, ma se qualche cosa è sfuggita alla nostra attenzione, dì pure.
(Di) A proposito della somma dei primi N numeri interi non ho niente da aggiungere, ma ora sono interessato alla somma dei quadrati dei primi N numeri interi.
(Ma) Vuoi sapere se c'è una espressione analoga? La risposta è affermativa, ma mi stupisce che tu non l'abbia già trovata.
(Di) Infatti ho fatto una ricerca ed ho una formula. Mi chiedo però se esiste un procedimento efficace per …
(Ma) per dimostrarla? Usa il metodo dell'induzione.
(Di) Questo metodo, però, richiede che già si conosca l'espressione. Troppo comodo. Vorrei un modo per vedere come l'espressione salta fuori.
(Ma) C'è il lavoro sotterraneo del matematico, che di solito viene tenuto dietro le quinte. Ogni matematico, poi, ha un approccio del tutto personale, quindi di solito non c'è un solo modo.
(Di) Non sono interessato ai metodi generali della matematica, ma a un modo per ottenere questa specifica formula.
(Ma) Dunque vorresti un modo ... tuo. Perfetto. Prendiamolo come un problema. Dunque, da dove cominceresti?
(Di) Mettendo in fila i primi quattro – cinque termini:

$$1+4+9+16+\ldots+N^2$$

Il metodo che ha usato Gauss qui non funziona.
(Ma) Già. E allora cerchiamo un altro percorso. Che ne diresti dell'analisi? Alla fin fine è una somma di termini successivi. Però conviene fare una rappresentazione grafica.
(Di) Provvedo subito:



È un grafico discreto corrispondente alla funzione: $y_K = k^2$
(Ma) Ora prova ad associare ad ogni temine un'area.
(Di) Allargando lo spessore delle barre? C'è spazio fino alla barra successiva e la base è unitaria:



(Ma) Ottimo lavoro. Ora abbiamo un modo per calcolare la nostra somma …
(Di) calcolando l'area della figura ottenuta.
(Ma) Con un integrale. Basta sostituire alla variabile discreta k una variabile continua x.
(Di) Bene. Se la prima barra la facciamo partire dall'origine, allora l'ultima barra arriva fino ad N. Dunque abbiamo:

$$S_N = \int_0^N x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^N = \frac{N^3}{3}$$

Non è la formula giusta. Infatti abbiamo approssimato il discreto con il continuo.
(Ma) Sì, però ci dà un'indicazione su come deve essere: il prodotto di tre termini in N. Si può migliorare l'approssimazione …
(Di) Che però resterà sempre un'approssimazione, non l'espressione esatta!
(Ma) Hai ragione. Cerchiamo allora di capire dove l'integrale sbaglia, pezzettino …
(Di) per pezzettino! Certo. Allora il k-esimo pezzettino è:

$$S_K = \int_{K-1}^{K} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{K-1}^{K} = \frac{k^3}{3} - \frac{(k-1)^3}{3} = k^2 - k + \frac{1}{3}$$

(Ma) Ottimo. Bisogna esplicitare …
(Di) kappa quadro!

$$k^2 = \int_{K-1}^{K} x^2 dx + k - \frac{1}{3}$$

Geniale! Così è ricondotto all'integrale ed a termini di grado minore …
(Ma) che sappiamo già come calcolare. Vai avanti.
(Di) Sommiamo su tutti i kappa ed abbiamo:

$$\sum_1^N k^2 = \int_0^N x^2 dx + \sum_1^N k - \sum_1^N \frac{1}{3}$$

Tutti questi pezzi li sappiamo già calcolare, quindi:

$$\sum_1^N k^2 = \frac{N^3}{3} + \frac{N \cdot (N+1)}{2} - \frac{N}{3} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

Obiettivo raggiunto!
(Ma) Bene, per oggi può bastare. A domani.

SECONDO GIORNO

(Di) La tecnica che abbiamo messo in campo ieri mi ha dato da pensare.
(Ma) Mi fa piacere. A cosa precisamente?
(Di) Bé, mi sono chiesto se non sia possibile estenderla ad altre situazioni simili. Sto pensando alla somma dei cubi, delle quarte potenze … , eccetera.
(Ma) Benissimo, allora questo sarà il problema di oggi. Cominciamo subito con i cubi.
(Di) Cambia la funzione discreta che diventa: $y_K = k^3$, ma il resto del procedimento dovrebbe essere lo stesso.
(Ma) Certo, tutto quello che dovrai fare sarà calcolare il solito pezzettino dell'integrale …
(Di) che però ora è:

$$S_K = \int_{K-1}^{K} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{K-1}^{K} = \frac{k^4}{4} - \frac{(k-1)^4}{4} = k^3 - \frac{3k^2}{2} + k - \frac{1}{4}$$

Il termine k^3 c'è. Funziona, anche se la sua espressione è un po' più complicata:

$$k^3 = \int_{K-1}^{K} x^3 dx + \frac{3k^2}{2} - k + \frac{1}{4}$$

(Ma) Fai pure il conto.
(Di) È alquanto schematico. Si sommano tutti i pezzettini e si ottiene:

$$\sum_1^N k^3 = \int_0^N x^3 dx + \frac{3}{2}\sum_1^N k^2 - \sum_1^N k + \sum_1^N \frac{1}{4}$$

E quindi:

$$\sum_1^N k^3 = \frac{N^4}{4} + \frac{3}{2}\frac{N(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N\cdot(N+1)}{2} + \frac{N}{4}$$

Bisogna rimaneggiare un po' il risultato, ma il metodo funziona.
(Ma) Ormai che ci sei, fallo.
(Di) Dunque, raccogliendo un N, poi un (N+1), e semplificando, si ottiene un altro N ed un altro (N+1). La formula è questa:

$$\sum_1^N k^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

(Ma) Sì, è proprio questa. Ottimo lavoro.
(Di) Però mi è venuta voglia di andare oltre.
(Ma) Invece di procedere caso per caso, ti propongo di andare subito al caso generale. Che ne dici?
(Di) Intendi generalizzare al caso n-esimo?
(Ma) Proprio così, seguendo lo schema pari pari.
(Di) Ottimo.
Dunque, nel caso generale la funzione discreta dovrebbe essere: $y_K = k^n$
Ed il pezzettino di integrale:

$$S_K = \int_{K-1}^{K} x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{K-1}^{K} = \frac{k^{n+1}}{n+1} - \frac{(k-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{1}k^n - \binom{n+1}{2}k^{n-1} + ...\right]$$

Ci sono i coefficienti binomiali ed i segni sono alterni.
(Ma) Quel che ci interessa è che li sappiamo calcolare. Quindi vai pure avanti. Fai solo caso al primo coefficiente binomiale …
(Di) che è proprio (n+1), quindi si semplifica esattamente, qualunque sia n.
Posso trovare l'espressione di k^n:

$$k^n = \int_{K-1}^{K} x^n dx + \frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{2}k^{n-1} - \binom{n+1}{3}k^{n-2} + \ldots\right]$$

E, sommando, l'espressione della somma delle n-esime potenze dei primi N numeri interi:

$$\sum_1^N k^n = \int_0^N x^n dx + \frac{1}{n+1}\left[\binom{n+1}{2}\sum_1^N k^{n-1} - \binom{n+1}{3}\sum_1^N k^{n-2} + \ldots\right]$$

(Ma) Lascialo pure così. Questa è una espressione che può essere usata in modo ricorsivo.
(Di) Ma sì!
Possiamo calcolare le somme dei primi N numeri interi con tutte le potenze.
(Ma) Anche per oggi è tutto. A domani.

TERZO GIORNO

(Ma) Dato che ieri ti ho visto così soddisfatto, oggi vorrei soffermarmi con te sullo stesso tema.
(Di) Ma abbiamo già esplorato tutte le potenze dei primi N numeri interi.
(Ma) È vero, però si può procedere nello stesso modo anche con altri tipi di somme.
(Di) Vuoi dire che possiamo calcolarci anche, che so, le somme dei prodotti, a due a due, dei primi *N* numeri interi?
(Ma) Esattamente a cosa stai pensando?
(Di) Stavo pensando a espressioni come questa:

$$1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + \ldots + (N-1)\cdot N$$

(Ma) Bene, si può fare.
(Di) Se non ricordo male esistono delle formule che riconducono $\sum_1^N {}_{i<j}\, k_i k_j$ rispettivamente a $\left(\sum_1^N k_i\right)^2$ e a $\sum_1^N (k_i)^2$. Nel nostro caso è anche più semplice, in quanto risulta $k_i = i$ e ovviamente $k_j = j$. Applicando queste formule si ricade nel caso precedente.
(Ma) Ottimo, però tutto questo lavoro non è necessario… proprio per quello che hai detto sugli indici. … Prova a raccogliere il numero intero di destra.
(Di) Ah, forse ho capito. La sequenza si scrive in questo modo:

$$(1)\cdot 2 + (1+2)\cdot 3 + \ldots + (1+2+\ldots+(N-1))\cdot N$$

(Ma) Bene, prosegui.
(Di) Dunque, il termine generico è: $y_k = (1+2+\ldots+(k-1))\cdot k$
(Ma) Hai notato che si ricade in un caso precedente?
(Di) Ah sì, rispunta la somma dei primi *k* numeri interi, che infatti so quanto vale. Quindi:

$$y_k = \frac{k^2(k-1)}{2} = \frac{k^3}{2} - \frac{k^2}{2}$$

E allora: $\sum_1^N y_k = \frac{1}{2}\sum_1^N k^3 - \frac{1}{2}\sum_1^N k^2$
(Ma) Hai notato che anche queste somme sono già state calcolate?
(Di) Vero, posso andare subito al risultato finale:

$$\sum_1^N {}_{i<j}\, i\cdot j = \frac{N^2(N+1)^2}{8} - \frac{N(N+1)(2N+1)}{12}$$

Facendo un po' di conti …. Mi risulta così:

$$\sum_{1}^{N}{}_{i<j}\, i\cdot j = \frac{N(N+1)(N-1)(3N+2)}{24}$$

(Ma) Bene, già che ci siamo possiamo anche generalizzare, non credi?
(Di) Intendi somme di prodotti a *m* a *m* ?
(Ma) Esatto, ma cominciando dai prodotti *3* a *3*. Prova a scriverli per esteso:
(Di) Tenendo conto dell'esperienza di prima, … direi di scriverle così:

$$(1\cdot 2)\cdot 3 + (1\cdot 2 + 1\cdot 3 + 2\cdot 3)\cdot 4 + ... + (1\cdot 2 + 1\cdot 3 + ... + (N-2)(N-1))\cdot N$$

(Ma) Cosa noti?
(Di) Che si riconduce al caso precedente. Possiamo calcolarle tutte in modo ricorsivo.
(Ma) Esattamente. O, almeno, sappiamo come è possibile farlo.
Anche per oggi è tutto. A domani.

QUARTO GIORNO

(Ma) Fin qui ci siamo saziati abbondantemente. Non vorrei che ciò ci togliesse del tutto la fame.
(Di) Non per me, io non mi sento mai abbastanza sazio.
(Ma) Allora dobbiamo mettere qualcosa sul fuoco.
(Di) Perché non ritorniamo alle sequenze dei primi N numeri interi? Non abbiamo esaminato neanche una delle sequenze con esponenti negativi.
(Ma) Non ti arrendi facilmente, tu. Però ti avverto: certe carni sono tutto fumo e niente arrosto.
(Di) Mi stai dicendo che con l'esponente negativo cambia tutto?
(Ma) Infatti, perché quando fai l'integrale di una potenza negativa …
(Di) aspetta, il grado, invece di diminuire, aumenta.
(Ma) E ciò rende pressoché inutilizzabile il metodo.
(Di) Vuoi dire che, perché il metodo funzioni bisogna che il grado non aumenti?
(Ma) Pressappoco.
(Di) Quindi si può applicare anche a sequenze diverse dai primi N interi?
(Ma) Esattamente. Devi solo pensare a una funzione che abbia una primitiva che non aumenti di grado.
(Di) Potrebbe essere un esponenziale? La sua primitiva è uguale a se stesso.
(Ma) Esattamente a quale espressione stai pensando?
(Di) A questa:

$$e^{1}+e^{2}+e^{3}+e^{4}+\ldots+e^{N}$$

(Ma) Sì, le premesse ci sono, non resta che provare. Dai trova il k-esimo pezzettino.
(Di) Dunque, la funzione è $y_K = e^K$, e noi dobbiamo calcolare:

$$S_K = \int_{K-1}^{K} e^x dx = \left[e^x\right]_{K-1}^{K} = e^k - e^{k-1} = e^k\left(1-\frac{1}{e}\right)$$

C'è il termine e^K, ma con un coefficiente.
(Ma) L'importante è che il coefficiente sia costante, indipendente da *k*, in questo caso lo si può portare a primo membro e, siccome ha lo stesso valore per ogni elemento integrale, lo si può raccogliere.
(Di) Ah, quindi posso proseguire in questo modo:

$$e^k = \frac{e}{e-1}\int_{K-1}^{K} e^x dx$$

(Ma) Certo, e adesso somma e concludi.
(Di) Con vero piacere: $\sum_{1}^{N} e^k = \frac{e}{e-1}\int_{0}^{N} e^x dx = \frac{e}{e-1}(e^N - 1)$

(Ma) Non ti dice niente questa espressione?
(Di) Ora che la guardo bene, assomiglia moltissimo alla formula delle progressioni geometriche.
(Ma) Perché è in progressione geometrica.
(Di) Dunque, se raccolgo *e* da tutti i termini e … hai ragione, i termini sono in progressione con fattore *e*:

$$e+e^2+...+e^N = e\cdot(1+e+...+e^{N-1}) = e\cdot\frac{e-1}{e-1}(1+e+...e^{N-1}) = e\cdot\frac{e^N-1}{e-1}$$

Ancora più semplice.
(Ma) Infatti siamo in una situazione particolare, in cui tutti i termini sono riconducibili alla stessa funzione e sono anche in progressione geometrica, quindi funzionano entrambi i metodi.
(Di) Se sostituissi *e* con una *x*?

$$x^1+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^N$$

Non è più un esponenziale, ma una forma polinomiale con i termini in progressione.
(Ma) Dipende da come la guardi. Immagina che la *x* non sia una incognita, ma una base. Invece che chiamarla *x* faresti bene a chiamarla *a*.
(Di) Otterrei la funzione $y_K = a^K$. Così si riconduce al caso precedente.
(Ma) Bene. Puoi Anche per oggi possiamo ritenerci soddisfatti. A domani quindi.

QUINTO GIORNO

(Ma) Oggi, che ti rivedo ben gasato, ti ripropongo lo stesso tema di ieri, però con altre funzioni.
(Di) In effetti sarei impaziente di provare con le funzioni *seno* e *coseno*.
(Ma) Ed allora non perdiamo altro tempo.
(Di) Dunque per la funzione *seno* ho in mente la sequenza:

$$sen1+sen2+sen3+...+sen N$$

Corrisponde alla funzione discreta: $y_K = sen\,k$
(Ma) Vai pure avanti. Non ti curare di me.
(Di) Devo calcolarmi un pezzetto di integrale:

$$S_K = \int_{K-1}^{K} sen\,x\,dx = \left[-\cos x\right]_{K-1}^{K} = \cos(k-1)-\cos k$$

Sembra che il metodo non funzioni, dato che compare il coseno e non il seno.
(Ma) Vero, però, sviluppando il cos(k-1) …
(Di) Ci avevo pensato anch’io, ma in questo modo compaiono sia il seno che il coseno e con coefficienti diversi.
(Ma) E non hai una soluzione? Rifletti sul fatto che hai due incognite.
(Di) Potrei mettere a sistema con un’altra equazione, … che potrei dedurre analizzando contemporaneamente anche la funzione *coseno*.
(Ma) È una possibilità concreta. Tuttavia vorrei che tu non seguissi questa strada, ma che ti concentrassi sull’espressione di S_k. Nota come ci sia un segno meno tra i due coseni, da cui, se fosse possibile svilupparli entrambi, il coseno potrebbe elidersi.
(Di) … Penso che dovrei cambiare gli estremi di integrazione. … Ma ciò equivale a cambiare la posizione di ciascun elemento di superficie!
(Ma) Infatti. E pensi che non si possa fare? Non ti devi affezionare ad un sistema solo perché finora ha funzionato, non ti pare?
(Di) In effetti non c’è motivo di posizionare le barre tutte a sinistra del valore della variabile, posso posizionarle anche a destra o anche al centro.

(Ma) Sinistra, destra, centro. Come vedi ne stai parlando come se si trattasse di una *formattazione*. Comunque, usando il tuo stesso linguaggio, l'importante è che venga fissata la stessa "formattazione" per tutte.
(Di) Ho pensato che forse mi conviene la "formattazione centrale". È quella che dà la migliore approssimazione. O Dio, avremo dovuto adottarla da subito.
(Ma) E avremmo fatto bene, però nei casi che avevamo già visto anche la "formattazione a sinistra" ha funzionato bene, quindi non farti venire sensi di colpa.
Piuttosto procedi con la revisione del conto.
(Di) Bene, con "formattazione centrale" il pezzetto di integrale è:

$$S_K = \int_{K-\frac{1}{2}}^{K+\frac{1}{2}} sen\, x\, dx = [-\cos x]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \cos(k-\frac{1}{2}) - \cos(k+\frac{1}{2})$$

Avevi ragione, ora c'è una simmetria tra i due termini.
(Ma) Ed allora sviluppa.
(Di) Devo applicare una nota formula trigonometrica:

$$S_K = \cos k \cdot \cos\frac{1}{2} + sen\, k \cdot sen\frac{1}{2} - \cos k \cdot \cos\frac{1}{2} + sen\, k \cdot sen\frac{1}{2} = 2sen\, k \cdot sen\frac{1}{2}$$

Il termine in coseno si è semplificato ed è rimasto solo il termine in seno.
(Ma) Era proprio quello che volevamo. Ora non ci sono più intoppi.
(Di) Esplicito *sen k* e poi sommo. Be, vado subito al sodo:

$$\sum_1^N sen\, k = \frac{1}{2sen\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} sen\, x\, dx = \frac{1}{2sen\frac{1}{2}} \left[\cos\frac{1}{2} - \cos(N+\frac{1}{2})\right]$$

La formula ha un suo fascino, non trovi?
(Ma) Si, è proprio una bella formula. Vale tutta la pena di ricavarla.
(Di) Quale pena? Per me è stato un vero piacere. Dammi solo il tempo di rifare il conto per il *coseno*. Ecco dovrebbe essere così:

$$\sum_1^N \cos k = \frac{1}{2sen\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} \cos x\, dx = \frac{1}{2sen\frac{1}{2}} \left[sen(N+\frac{1}{2}) - sen\frac{1}{2}\right]$$

Assomiglia molto a quella precedente… Nel coefficiente è rimasto il seno.
(Ma) Bene. Oggi godiamoci queste due espressioni. A domani.

SESTO GIORNO

(Ma) Non abbiamo ancora esplorato abbastanza?
(Di) In effetti c'è ancora una cosa che mi lascia perplesso.
(Ma) Sputa il rospo.
(Di) È a proposito dei termini di tipo x^n. Noi sappiamo integrarli con $n \neq -1$, sia quando n è positivo, che quando è negativo, usando una stessa formula e ottenendo ancora un termine dello stesso tipo. Quando invece $n = -1$ la formula non vale più ed il risultato non è una *potenza*, ma la funzione *logaritmo*. Vorrei una spiegazione per questo.
(Ma) In effetti c'è un salto netto ed è strano che entri in ballo la funzione logaritmo. Va bene, indaghiamo.
(Di) Non saprei proprio da dove cominciare.

(Ma) Il tuo problema è che per te n è un numero naturale, ma forse ti converrebbe uscire da questo schema mentale.
(Di) Ah, se ho compreso il suggerimento, invece che n conviene prendere un α?
(Ma) E poi fare il limite. Così puoi vedere cosa succede vicino a *-1*.
(Di) Va bene. Allora prendo la funzione di variabile reale ed esponente reale:

$$y = x^{\alpha}$$

Non mi pare tanto produttiva.
(Ma) Hai ragione. Conviene mettersi da subito in un intorno di *-1*.
(Di) Dunque vediamo. Potrei scrivere $\alpha = -1 + \varepsilon$. La funzione diventerebbe:

$$y = x^{-1+\varepsilon}$$

Siccome ε è molto piccolo, ma non nullo, posso integrare usando la formula e poi fare il limite.
(Ma) Concordo pienamente. Procedi.
(Di) È semplice, ottengo:

$$\int x^{-1+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} x^{\varepsilon}$$

Facendo il limite ottengo zero.
(Ma) Cosa ti aspettavi di ottenere?
(Di) Bé, l'integrale di uno su ics è il logaritmo. Mi aspettavo di ottenere il logaritmo.
(Ma) Non darti per vinto e vedi se ti sei dimenticato qualcosa.
(Di) Non mi pare proprio.
(Ma) Sicuro? Quando hai integrato …
(Di) ah sì, mi sono dimenticato una costante. Ma non dovrebbe cambiare la sostanza.
(Ma) Tu prova.
(Di) Va bene, allora modifico la formula così:

$$\int x^{-1+\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} x^{\varepsilon} + c$$

Facendo il limite …
(Ma) Aspetta, prima di fare il limite, cerca di dare un valore alla costante.
(Di) Se ε è piccolo non dovrebbe allontanarsi molto dal logaritmo. Mi basterebbe fissarla in un punto.
(Ma) Ottima idea, quale punto prenderesti?
(Di) Direi quello in cui il logaritmo passa per lo zero. Ma sì, prendo il punto (1,0). Allora $c = -\frac{1}{\varepsilon}$
(Ma) Vedi? C dipende da ε. Ecco perché è stato importante trovarlo prima di fare il limite.
(Di) Adesso sostituisco e ottengo:

$$\int x^{-1+\varepsilon} = \frac{x^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$$

Adesso il limite non è più zero, ma è diventata una forma indeterminata.
(Ma) Non ti farai spaventare spero.
(Di) Certo che no, anzi. Sono proprio curioso di vedere cosa dà. Faccio il rapporto delle derivate. Devo solo ricordarmi che l'incognita non è x, ma ε, quindi devo applicare le regole di derivazione degli esponenziali:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\log x \cdot x^{\varepsilon}}{1} = \log x$$

Bingo. Ho ottenuto un risultato fantastico:

$$\log x = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$$

(Ma) Hai visto? Il logaritmo non è poi una funzione così strana. Puoi usare l’espressione di destra per ricavarti tutte le proprietà del logaritmo ed anche per calcolarlo in ogni punto.
(Di) Lo farò immediatamente.
(Ma) Non troppo immediatamente. Per ora ci possiamo fermare qui.
(Di) Possiamo farlo domani.
(Ma) No, domani è il settimo giorno, e si riposa.